

Theoretische Herleitung der Auswirkung der Kolbenbeschleunigung auf die Federringe am oberen Pleuellager mit anschließender Diskussion der Ergebnisse

Die Fragestellung lautet: Wie groß wird das Drehmoment um den Punkt D des Federrings durch die Kolbenbeschleunigung a_K und kann das Drehmoment so groß werden, dass der Federring verformt wird? (siehe auch Bild 1 und Bild 2)

Um diese Frage zu beantworten, wird in Teil 1 zunächst das Drehmoment, das für eine minimale Verformung des Federrings notwendig ist, statisch bestimmt.

In Teil 2 wird dann das Drehmoment theoretisch berechnet, das durch die Kolbenbeschleunigung erzeugt wird.

In Teil 3 werden die beiden Drehmomente verglichen und die Ergebnisse diskutiert.

Teil 1: Berechnung des Drehmoments, welches nötig ist, um den Federring im eingebauten Zustand zu verformen

Mit einer Federwaage („Messvorrichtung“) wird eine Kraft F_s auf den im Kolben eingebauten Federring ausgeübt. Die Kraft F_s wird dann solange erhöht, bis der Federring anfängt sich zu verformen. Siehe dazu auch Bild 1, hier wird klar, dass die bestimmende Größe das Drehmoment um den Punkt D ist. Insgesamt wurden zehn verschiedenen Federringe vermessen. Der Kolben samt Federring wurden mit einem Heißluftgebläse aufgeheizt, um möglichst nah an die Gegebenheiten des Betriebszustandes zu kommen. Im Mittel zeigte die Waage einen Wert von $2,4 \text{ kg}$. Die Werte aller zehn Federringe waren sehr ähnlich (größte Abweichung vom Mittelwert waren $0,2 \text{ kg}$). Zur Sicherheit rechnen wir mit dem kleinsten Wert von $2,2 \text{ kg}$. Mit der auf der Erde vorherrschenden Gewichtskraft von $9,81 \text{ N kg}^{-1}$ ergibt sich ein $F_s = 21,6 \text{ N}$.

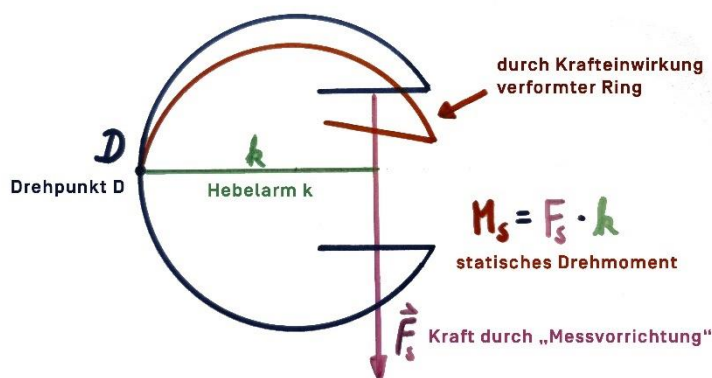


Bild 1: Federring unverformt (blau), Federring verformt (rot)

Der Hebelarm k wurde zu $k = 13 \text{ mm}$ bestimmt. Da hier \vec{k} und \vec{F}_S senkrecht stehen, lässt sich das Drehmoment M_S um den Punkt D zu:

$$M_S = F_S \cdot k = 21,6 \text{ N} \cdot 13 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,28 \text{ Nm} \quad (1)$$

berechnen. Bedeutet: Ab diesem Drehmoment ist eine minimale Bewegung des Federringes wahrnehmbar.

Teil 2: Theoretische Berechnung des Drehmomentes, welches durch die Kolbenbeschleunigung erzeugt wird.

Allgemein gilt für das Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2)$$

Es gilt außerdem allgemein: $\vec{F} = m \vec{a}$. In nicht-vektorieller Schreibweise wird (2) zu (3):

$$M = r F \sin \gamma \quad (3)$$

Wobei γ der eingeschlossene Winkel zwischen \vec{r} und \vec{F} ist. In unserem Fall können wir \vec{r} so projizieren, dass wir \vec{r}' erhalten, siehe auch Bild 2. Dieses \vec{r}' steht nun stets senkrecht auf \vec{F} oder auch \vec{a}_K . Daher wird der $\sin \gamma = 1$. So wird aus (3):

$$M = r' F \quad (4)$$

oder auch:

$$M_{Ring} = r' m a_K \quad (5)$$

In Bild 2 ist der Federring mit dem Radius R dargestellt. Außerdem sind der Punkt D sowie r, r' und der halbe Öffnungswinkel β_1 des Federrings eingezeichnet. Zusätzlich ist die Beschleunigung \vec{a}_K eingezeichnet, wobei diese natürlich sowohl positiv als auch negativ werden kann, also nach oben oder unten zeigen kann.

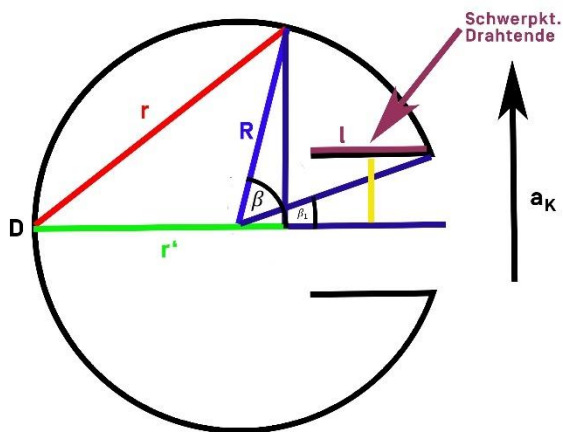


Bild 2: Federring mit geometrischen Beschriftungen

Zunächst müssen wir nun die Masse des Ringes bestimmen, das ist einfach, wir legen den Ring auf die Waage. Insgesamt wurde zehn Federringe gewogen, alle hatten eine Masse von $m_{\text{Ring}} = 0,9 \text{ g}$.

Leider nützt die Gesamtmasse des Rings nur sehr bedingt, denn wie aus (5) und aus Bild 2 ersichtlich, ist jedes Massenstückchen des Rings unterschiedlich weit vom Drehpunkt D weg. Und das bedeutet, mit einer einfachen Multiplikation ist es nicht getan, es läuft auf eine Integration hinaus. Dazu zerhacken wir den Ring in kleine Stücke mit der Länge ds , berechnen für jedes Stückchen den Anteil am Gesamtdrehmoment und addieren alles auf.

Für einen winzigen Teil des Gesamtdrehmoments ergibt sich mit Bild 2:

$$dM_{\text{Ring}} = r' \cdot a_K dm = (R + R \cos \beta) a_K dm \quad (6)$$

Nun müssen wir dm bestimmen. Dazu nützt uns die Gesamtmasse m_{Ring} . Wir berechnen eine Längendichte:

$$\varrho_{\text{Ring}} = \frac{m_{\text{Ring}}}{L_{\text{Ring}}} \quad (7)$$

Wobei L_{Ring} die Gesamtlänge des abgewickelten Federringes ist, diese Größe lässt sich geometrisch oder auch experimentell (Abwicklung eines aus Kupferdraht nachgebogenen Federclips) bestimmen. Gemessen wurde $L_{\text{Ring}} = 67 \text{ mm}$. Somit ergibt sich eine Längendichte von:

$$\varrho_{\text{Ring}} = 0,0134 \text{ kg m}^{-1} \quad (8)$$

Somit ergibt sich:

$$dm = \varrho_{\text{Ring}} ds \quad (9)$$

Wobei ds ein Abschnitt auf dem Kreisbogen des Federrings ist. Er lässt sich mit dem Winkel β und dem Radius R des Federrings ausdrücken:

$$ds = R d\beta \quad (10)$$

Wobei hier zu beachten ist, dass der Winkel β im Bogenmaß zu betrachten ist. Mit (6), (9) und (10) ergibt sich:

$$dM_{Ring} = (R + R \cos \beta) a_K \varrho_{Ring} R d\beta \quad (11)$$

Um nun das Gesamtdrehmoment zu berechnen, welches durch den oberen Kreisbogen des Federrings am Punkt D entsteht, müssen wir über den Kreisbogen integrieren. Und zwar von $\beta_1 = 27^\circ = 0,471$ (halber Öffnungswinkel des Federrings, geometrisch bestimmt) bis π (also von β_1 bis 180°) siehe auch Bild 2:

$$M_{Ring} = \int_{\beta_1}^{\pi} R^2 a_K \varrho_{Ring} (1 + \cos \beta) d\beta \quad (12)$$

Die Lösung des Intergrals lautet:

$$M_{Ring} = R^2 a_K \varrho_{Ring} (\beta + \sin \beta) \Big|_{\beta_1}^{\pi} \quad (13)$$

Ergibt sich:

$$M_{Ring} = R^2 a_K \varrho_{Ring} (\pi - \beta_1 - \sin \beta_1) \quad (14)$$

Zu dem Drehmoment M_{Ring} muss nun noch das Drehmoment addiert werden, welches durch das nach innen gebogene Drahtstück zustande kommt und die Länge l hat, siehe auch Bild 2. Da auch jedes Massenelement dieser Drahtstücks einen anderen Abstand zum Punkt D hat, müssten wir auch hier integrieren. Doch weil der Draht ein Geradenstück ist, können wir hier sagen, dass sich die gesamte Masse des Drahtes in seinem Schwerpunkt vereint, siehe auch hier Bild 2. Der Schwerpunkt liegt genau in der Mitte des Drahtstücks. Die Projektion des Schwerpunktes auf die x-Achse ergibt einen Abstand r_l vom Drehpunkt und berechnet sich zu:

$$r_l = R(1 + \cos \beta_1) - \frac{l}{2} \quad (15)$$

Das Drehmoment M_l des Drahtstücks berechnet sich zu:

$$M_l = r_l \varrho_{Ring} l a_K \quad (16)$$

Das Gesamtdrehmoment M_d ergibt sich nun zu:

$$M_d = M_{Ring} + M_l \quad (17)$$

Alles eingesetzt ergibt sich das Gesamtdrehmoment M_d zu:

$$M_d = a_K \varrho_{Ring} \left\{ R^2 (\pi - \beta_1 - \sin \beta_1) + l \left[R(1 + \cos \beta_1) - \frac{l}{2} \right] \right\} \quad (18)$$

Um den Wert von M_d berechnen zu können, benötigen wir nun noch die Kolbenbeschleunigung a_K , die wir im nächsten Abschnitt berechnen werden.

Berechnung der Kolbengeschwindigkeit, der Kolbenbeschleunigung, der mittleren Kolbengeschwindigkeit, der maximalen Kolbengeschwindigkeit und der maximalen Kolbenbeschleunigung

Aus Bild 3 lässt sich mit Hilfe der Winkelfunktionen und des Pythagoras eine Funktion aufstellen, die den Ort des oberen Pleuellagers in Abhängigkeit vom Drehwinkel angibt.

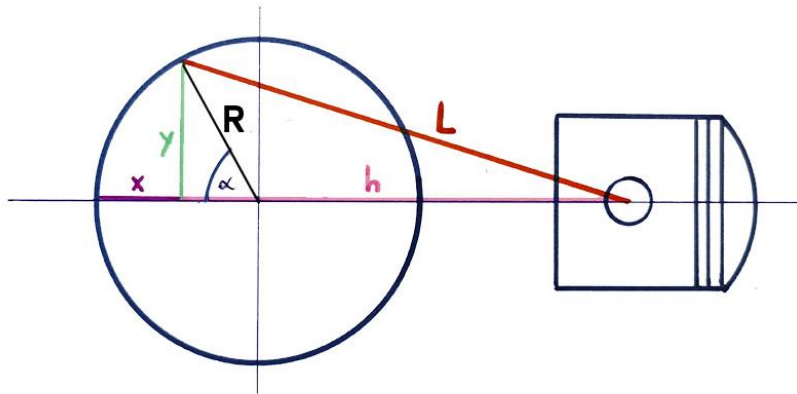


Bild 3: Kurbelwelle, Pleuel und Kolben, Motorgeometrie, nicht maßstabsgerecht

Mit

$$x = R - R \cos \alpha \quad (19)$$

und

$$L^2 = h^2 + y^2 \quad (20)$$

und

$$y = R \sin \alpha \quad (21)$$

ergibt sich

$$s(\alpha) = x + h - L \quad (22)$$

mit (19), (20) und (21) folgt aus (22):

$$s(\alpha) = R(1 - \cos \alpha) + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \alpha} - L \quad (23)$$

Wobei das hintere L (Pleuellänge) nur dazu dient, dass der Funktionswert für $\alpha = 0$ (der untere Totpunkt) gleich Null ist. Der obere Totpunkt liegt dann bei $\alpha = \pi = 180^\circ$ und damit $s(\pi) = 61,5 \text{ mm}$, also der Wert des Hubes. Der Winkel α lässt sich auch zeitabhängig ausdrücken. Denn es gilt:

$$\alpha = \omega t \quad (24)$$

Wobei ω die Winkelgeschwindigkeit und t die Zeit ist. (23) wird mit (24) zu:

$$s(t) = R(1 - \cos(\omega t)) + \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} - L \quad (25)$$

$s(t)$ gibt den Ort an, an dem sich das obere Pleuellager zur Zeit t befindet. Die Kolbengeschwindigkeit erhalten wir durch einmaliges Differenzieren der Funktion $s(t)$ nach der Zeit. Also die erste zeitliche Ableitung des Ortes:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = R\omega \sin(\omega t) - \frac{1}{\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} R^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \omega \quad (26)$$

mit

$$\sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \quad (27)$$

folgt

$$v(t) = R\omega \sin(\omega t) - \frac{R^2 \omega \sin(2\omega t)}{2 \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} \quad (28)$$

Und nun das gleiche Spiel noch einmal: Die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit ergibt die Beschleunigung:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = R\omega^2 \cos(\omega t) - \left[\frac{R^2 2\omega^2 \cos(2\omega t) 2\sqrt{\sim} - R^2 \omega \sin(2\omega t) \frac{1}{\sqrt{\sim}} (-R^2 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \omega)}{4(L^2 - R^2 \sin^2(\omega t))} \right] \quad (29)$$

Zusammengefasst:

$$a(t) = R\omega^2 \left[\cos(\omega t) - \frac{R \cos(2\omega t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} - \frac{R^3 \sin^2(2\omega t)}{4 \sqrt{(L^2 - R^2 \sin^2(\omega t))^3}} \right] \quad (30)$$

Der Radius R ist gegeben durch den halben Hub, also

$$R = \frac{1}{2} (61,5 \cdot 10^{-3} \text{m}) \quad (31)$$

Die Pleuellänge von Lager-Mitte zu Lager-Mitte habe ich zu

$$L = 102 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (32)$$

ermittelt.

Bei einer Motordrehzahl von 6000 min^{-1} ergibt sich eine Frequenz von:

$$f = \frac{6000 \text{ min}^{-1}}{60 \text{ s min}^{-1}} = 100 \text{ s}^{-1} = 100 \text{ Hz} \quad (33)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist definiert als:

$$\omega = 2\pi f \quad (34)$$

Im Zahlenwert ergibt sich für ω :

$$\omega = 628,3 \text{ s}^{-1} \quad (35)$$

Die drei Funktionen $s(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ sind in Diagramm 1 dargestellt.

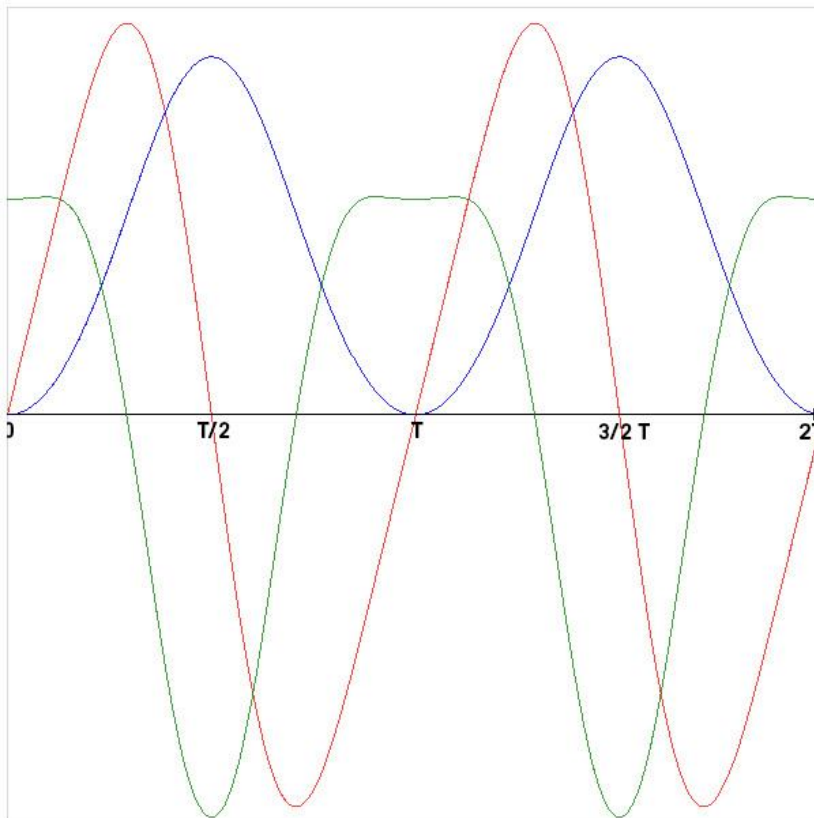


Diagramm 1: $s(t)$ blau, $v(t)$ rot und $a(t)$ grün, (y-Achse ohne Skalierung)

Während die Funktion $s(t)$ nicht besonders spannend ist, ist die Funktion $v(t)$ schon um einiges aufregender, denn wir können hier gut die Kolbengeschwindigkeiten ablesen. Mit einer Integration von $v(t)$ über die halbe Periodendauer $T = f^{-1}$ erhalten wir die mittlere Kolbengeschwindigkeit und über die Nullstellen von $a(t)$ erhalten wir exakt die maximale Kolbengeschwindigkeit. Außerdem erhalten wir über $a(t)$ natürlich die maximale Kolbenbeschleunigung (weswegen wir den ganzen Zinnober hier veranstalten). Wobei ich aber zunächst die Funktion $a(t)$ an sich sehr interessant finde, denn ich hatte mir nie überlegt, dass die betragsmäßige Beschleunigung am oberen Totpunkt wesentlich größer ist als die betragsmäßige Beschleunigung am unteren Totpunkt. Ich zumindest finde das spannend.

Berechnen wir zunächst die mittlere Kolbengeschwindigkeit, sie ergibt sich aus folgender Integration:

$$\bar{v}_K = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} v(t) dt = \frac{2}{T} s(t) \Big|_0^{\frac{T}{2}} \quad (36)$$

Mit $T = 0,01$ s, also bei 6000 min^{-1} , berechnet sich die mittlere Kolbengeschwindigkeit \bar{v}_K zu:

$$\bar{v}_K = 12,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (37)$$

Das hört sich doch ganz vernünftig an.

Um die maximale Kolbengeschwindigkeit zu ermitteln, müssen wir das Maximum von $v(t)$ bestimmen. Dazu suchen wir die Nullstellen von $a(t)$ und setzen somit:

$$a(t_{v_{\max}}) = 0 \quad (38)$$

Dazu müssten wir Gleichung (30) jetzt nach t auflösen, aber das ist ein ziemlich hoffnungsloses Unterfangen, deshalb machen wir das numerisch und erhalten für

$$t_{v_{\max,1}} = 2,93 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (39)$$

$$t_{v_{\max,2}} = 7,07 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (40)$$

Eingesetzt in (8) ergeben sich die maximalen Kolbengeschwindigkeiten zu:

$$v(t_{v_{\max,1}}) = 20,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (41)$$

$$v(t_{v_{\max,2}}) = -20,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (42)$$

Alles interessant, jetzt aber wirklich zur maximalen Kolbenbeschleunigung. Um ganz korrekt vorzugehen, müssten wir jetzt $a(t)$ noch einmal nach t differenzieren und dann die Nullstellen der neuen Funktion $\dot{a}(t)$ bestimmen, aber wir können es uns auch aus der Technik überlegen oder auch auf das Diagramm 1 schauen: Die maximale Kolbenbeschleunigung liegt am oberen Totpunkt. Wir haben unsere Bewegungsgleichung so aufgestellt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der untere Totpunkt erreicht wird, der obere Totpunkt wird dann zum Zeitpunkt $T/2 = 0,005$ s erreicht, also nach einer halben Periodendauer. Die betragsmäßig maximale Beschleunigung berechnet sich dann mit (30) zu:

$$a_{\max} = \left| a\left(\frac{T}{2}\right) \right| = 15799 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (43)$$

Damit ist die maximale Beschleunigung um den Faktor 1600 größer als die Erdbeschleunigung. Das finde ich schon mal ziemlich beeindruckend und lässt erahnen, welche großen Kräfte in diesem doch recht kleinen Motor wirken.

Interessant an dieser Stelle, wenn auch nicht wirklich wichtig, die Beschleunigung am unteren Totpunkt liegt bei rund der Hälfte, also bei ungefähr 8500 m s^{-2} . Was ich aber auch interessant

finde: Schaut man sich die Funktion $a(t)$ um den unteren Totpunkt an, erkennt man, dass der flache Sattel zwei Nebenmaxima hat. Siehe Diagramm 2. Die Ausprägung dieser Nebenmaxima lässt sich durch das Verhältnis von Kurbelwellenhub und Pleuellänge beeinflussen. Habe ich auch noch nie drüber nachgedacht. Spannend aber hier nicht das Thema.

Das Thema ist: Wie groß wird das Drehmoment um den Punkt D des Federrings durch die Kolbenbeschleunigung? Nun haben wir alle Größen bestimmt und können mit Gleichung (18) das Drehmoment M_d berechnen, wenn wir $a_K = a_{max}$ setzen. Es ergibt sich zu:

$$M_d = 0,062 \text{ Nm} \quad (44)$$

Das ist das maximale Drehmoment, das durch die Kolbenbeschleunigung auf den Federring wirkt.

Teil 3: Vergleich der Drehmomente M_s und M_d sowie die Diskussion des Ergebnisses

Das statische Drehmoment haben wir nach (1) zu:

$$M_s = k F_s = 13 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 22 \text{ N} = 0,28 \text{ Nm} \quad (45)$$

berechnet.

Das Verhältnis der beiden Drehmomente berechnet sich dann mit (44) zu:

$$\frac{M_s}{M_d} = \frac{0,28 \text{ Nm}}{0,062 \text{ Nm}} = 4,5 \quad (46)$$

Das statisch ermittelte Drehmoment ist somit um den Faktor 4,5 größer als das Drehmoment, welches durch die Kolbenbeschleunigung generiert wird. Sagen wir zur Sicherheit und der Einfachheit halber mal um den Faktor 4 größer. Was bedeutet das nun? Das bedeutet zunächst, dass rechnerisch, unter normalen Betriebsbedingungen, die Kraft, bzw. das Drehmoment, welches auf den Federring durch die Kolbenbeschleunigung wirkt, nicht groß genug ist, ihn zu verformen, dass er sich in der Nut abhebt, selbst wenn er in der ungünstigen „c“-Stellung eingebaut ist, die hier die Berechnungsgrundlage darstellt.

Ist es also doch egal, ob man den Ring in „c“-, „n“- oder „u“-Stellung einbaut? Das würde ich so nicht sagen. Schaut mal sich die Funktion $a(t)$ (30) an, sieht man, dass die Drehzahl (hier durch die Winkelgeschwindigkeit ω gegeben) im Quadrat in die Kolbenbeschleunigung eingeht. D.h. bei doppelter Drehzahl, wird die Beschleunigung vier Mal so groß und dann würde auch das Drehmoment auf den Ring vier Mal so groß werden. Das bedeutet bei einer Drehzahl von 12000 min^{-1} wird es sicher kritisch. Unsere Heinkel-Motoren können keine 12000 min^{-1} drehen, aber moderne Motorradmotoren können das. Das könnte erklären, warum zu heutigen Zeiten eher auf die Einbauposition der Federringe geachtet wird, als vor 60 Jahren. Aber das ist nur Spekulation.

Mein Fazit lautet: Wenn ich meine Motoren in Zukunft überhole, dann werde ich bewusst darauf achten, dass die Federringe in „u“- oder „n“-Stellung eingebaut sind, denn so können die Beschleunigungskräfte die Federspannung nicht schwächen. Aber ich werde den Motor, bei dem ich die Einstellungsrichtung der Federringe nicht kenne, geschlossen lassen und ganz normal mit ihm weiterfahren. So ein Faktor 4 gibt mir ein Gefühl der Sicherheit. Außerdem beruhigt mich der

quadratische Zusammenhang zwischen Drehzahl und Drehmoment eher, als dass er mir den Angstschweiß auf die Stirn treibt. Kurz überschlagen: Ich malträtiere meine Motoren nicht mit Vollgasfahrten bei Drehzahlen um die 6000 min^{-1} . Eher fahre ich gemütlich bei 4500 min^{-1} . Und dann ist das quadratische Verhältnis:

$$\frac{4500^2}{6000^2} = 0,56 \quad (47)$$

D.h. Das Drehmoment auf den Federring ist bei 4500 min^{-1} nur noch etwas größer als die Hälfte des Drehmoments bei 6000 min^{-1} . Da bin ich dann schon bei einem Faktor 8.

Mir macht das ein gutes Gefühl. ABER! ABER? ABER: Ich habe diese ganzen Überlegungen angestellt, weil ich mich, nach dem Lesen der Diskussion über „c“- „u“- und „n“-Stellung, gefragt habe: Muss ich mir jetzt Sorgen machen? Und diese Überlegungen, Messungen und Rechnungen bringen mich dazu, die Entscheidung für mich zu treffen, meinen Motor nicht zu öffnen und damit nicht zu kontrollieren, in welcher Stellung die Federringe verbaut sind.

Also noch mal ganz deutlich: Ich habe das für mich so beschlossen. Das Ganze hier ist keine Handlungsempfehlung oder gar Handlungsanweisung.

Und was ist nun, wenn schon jemand mal einen Schaden bei einem Heinkel-Roller hatte, der aufgrund einer Bewegung des Federrings entstanden ist? Ist dann alles falsch, was hier steht? Nein, für mich nicht. Es kann auch sein, dass es Federringe gibt, die vielleicht viel weniger Federkraft besitzen, die aus was für Gründen auch immer geschwächt sind, das kann alles ein Grund dafür sein. Ich habe zehn Federringe vermessen, ihre Werte waren alle sehr ähnlich, aber eine Garantie für alle Federringe, die jemals verbaut worden sind, ist das natürlich nicht.

Deshalb: Ich habe meine Überlegungen hier in diesem Papier zusammengefasst, weil ich denke, dass sie vielleicht für die eine oder den anderen von Interesse sein können. Wie Ihr dann handelt, ob Ihr Eure Motoren öffnet oder eben nicht, diese Entscheidung müsst Ihr allein treffen. Denn noch mal Molière, weil so unfassbar treffend: *Wir sind nicht nur verantwortlich für das, was wir tun, sondern auch für das, was wir nicht tun.*

Ich wünsche Euch allen eine stets unfall- und pannenfreie Fahrt und weiterhin viel Spaß mit der Heinkelei.

Euer Volker aus Wiesbaden